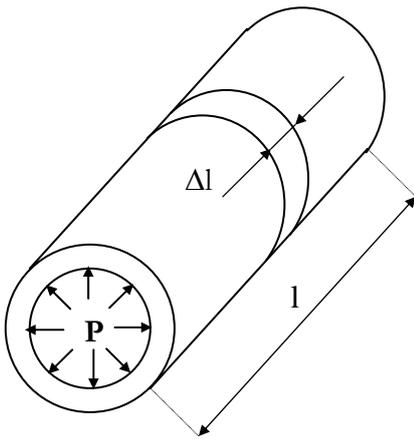


MQ41 TP n°4 : Etude d'une enveloppe mince

But : Le but de ce TP est de déterminer module d'Young E et coefficient de Poisson ν d'une enveloppe.

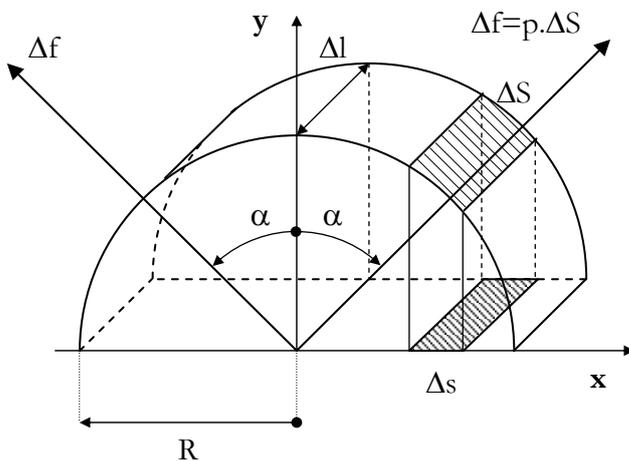
Pré-requis :

Considérons un cylindre clos (ou enveloppe mince) soumis à une pression P . On considérera que l'épaisseur est telle que $e \ll d$.

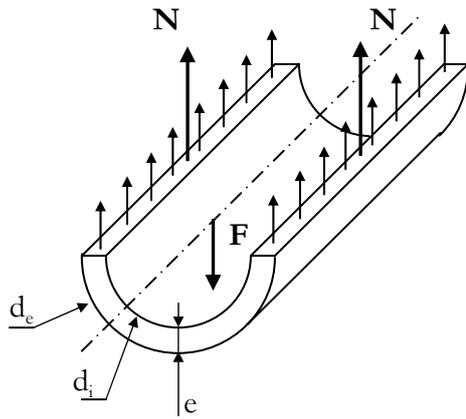


1. dans un cylindre clos, la poussée à pour projection :

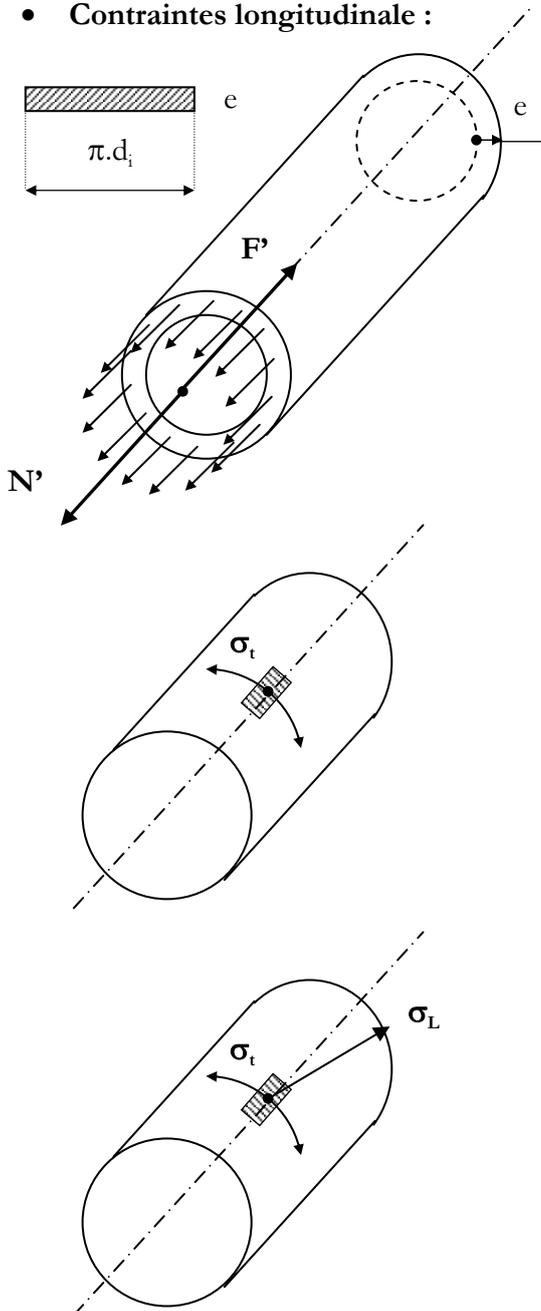
$$\begin{cases} / \vec{x} : \sum \Delta f \cdot \sin \alpha = 0 \\ / \vec{y} : \Delta F = \sum \Delta f \cdot \cos \alpha = \sum p \Delta S \cdot \cos \alpha = 2 \cdot R \cdot \Delta l = d \Delta l \\ (\Delta S \cdot \cos \alpha = \Delta s) \\ \Rightarrow F = p \cdot d \cdot l \end{cases}$$



• **Contraintes transversales :**



• **Contraintes longitudinale :**



2. détermination des contraintes transversales :

$$\begin{cases} F = p \cdot d_i \cdot l \\ 2N = 2\sigma_t \cdot l \cdot e \end{cases}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{F} + 2\vec{N} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow F = 2N \\ \Leftrightarrow p \cdot d_i \cdot l = 2\sigma_t \cdot l \cdot e \quad (S = l \cdot e) \\ \Leftrightarrow \sigma_t = \frac{p \cdot d_i}{2e} \end{cases} \quad (relation\ 1)$$

3. contrainte longitudinale :

$$\begin{cases} F' = p \cdot \frac{\pi \cdot d_i^2}{4} \\ N' = \sigma_L \cdot S \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = \frac{\pi}{4} (d_e^2 - d_i^2) \Rightarrow S = \pi \cdot d_i \cdot e \\ e \ll d \Rightarrow d_e \approx d_i \end{cases}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{F}' + \vec{N}' = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{F}' = \vec{N}' \\ \Leftrightarrow \frac{\pi \cdot d_i^2}{4} = \sigma_L \cdot \pi \cdot d_i \cdot e \\ \Leftrightarrow \sigma_L = \frac{p \cdot d_i}{4e} \end{cases}$$

4. on déduit le coefficient Poisson de la pressurisation interne :

$$\begin{cases} \epsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} \\ \epsilon_L = -\nu \cdot \frac{\sigma_t}{E} \end{cases} \Rightarrow \nu = -\frac{\epsilon_L}{\epsilon_t} \quad (relation\ 2)$$

5. σ_t provoque les déformations :

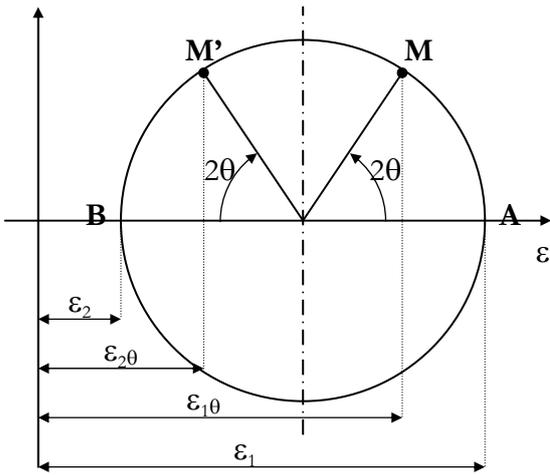
$$\begin{cases} \epsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} \\ \epsilon_L = -\nu \cdot \frac{\sigma_t}{E} \end{cases}$$

6. σ_L provoque les déformations :

$$\begin{cases} \epsilon_{2t} = -\nu \cdot \frac{\sigma_L}{E} \\ \epsilon_{2L} = \frac{\sigma_L}{E} \end{cases}$$

7. les déformations principales en seront une combinaison :

$$\begin{cases} \epsilon_t = \epsilon_{1t} + \epsilon_{2t} = \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu \cdot \sigma_L) \\ \epsilon_L = \epsilon_{1L} + \epsilon_{2L} = \frac{1}{E} (\sigma_L - \nu \cdot \sigma_t) \end{cases}$$

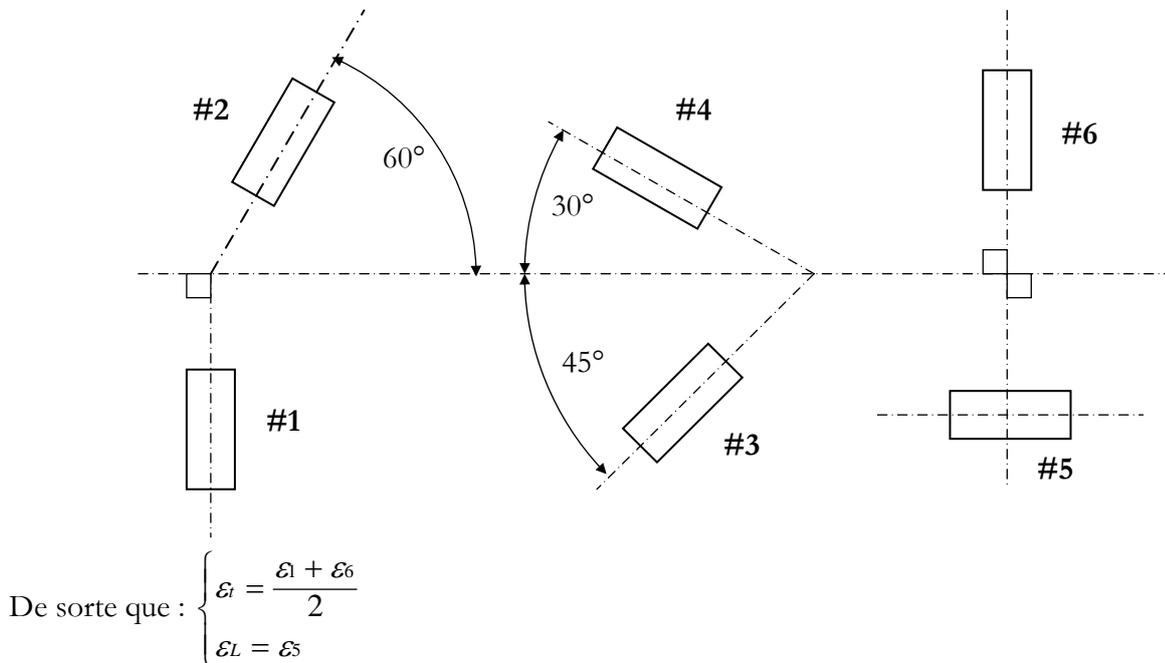


8. Le cercle de Möhr permet l'écriture suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_{1\theta} = \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \right) + \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \right) \cos(2\theta) \\ \varepsilon_{2\theta} = \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \right) - \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \right) \cos(2\theta) \end{cases} \quad (\text{relation 3})$$

Manipulation :*Disposition des rosettes*

On dispose les rosettes sur l'enveloppe mince de la façon suivante :

*Mises en garde*

- **partie A :** détermination de E et ν : charge axiale supprimée.
(visser complètement le bouton moleté)
- **partie B :** vérification du cercle de Mohr : les charges axiales et transversales existent.
(dévissser complètement le bouton moleté)
- **Partie C :** discussions et conclusions.

Ordre des opérations

- relever les caractéristiques initiales (sans charge ; $p=0$) des jauges (1), (5), (6).
- charger à : 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 N/mm², relever les caractéristiques des jauges (1), (5), (6).
- calculer les contraintes transversales correspondantes.
- calculer E et ν pour chaque cas et en déduire leurs valeurs moyennes.
- tracer les courbes $\sigma_i = f(\varepsilon)$ et $\varepsilon_s = f(\varepsilon)$ puis en déduire les valeurs de E et ν .
- relever les caractéristiques de six jauges pour $p=2\text{N/mm}^2$
- tracer le cercle de Mohr et déterminer les déformations pour les angles 30°, 45° et 60°.
- En se servant de E et ν calculer les déformations principales puis suivant 30°, 45° et 60°.

Partie A : charge axiale supprimée

Tableaux des valeurs expérimentales

p (N/mm ²)	σ_t (Mpa)	ε_1 (μdef)	$\varepsilon_5=\varepsilon_L$ (μdef)	ε_6 (μdef)	$(\varepsilon_1+\varepsilon_6)/2=\varepsilon_t$	E (Mpa)	ν
0	0,0000	937	-429	298	617,5	0,0000	0,6947
0,5	5,9858	1026	-446	375	700,5	8545,1093	0,6367
1	11,9717	1105	-469	450	777,5	15397,6825	0,6032
1,5	17,9575	1182	-492	525	853,5	21039,8912	0,5764
2	23,9434	1259	-518	598	928,5	25787,1796	0,5579
2,5	29,9292	1340	-544	675	1007,5	29706,4469	0,5400

enveloppe :

- diamètre (d_i) : 76,14 mm
- épaisseur (e) : 3,18 mm

Le module d'élasticité de Young E et le coefficient de Poisson ν de l'enveloppe sont déterminés d'après les relations pré-citées, à savoir :

$$(relation\ 1) \Leftrightarrow \sigma_t = \frac{p \cdot d_i}{2e}$$

$$(relation\ 2) \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} \\ \nu = -\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_t} \end{cases} \text{ en prenant } \begin{cases} \varepsilon_t = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_6}{2} \\ \varepsilon_L = \varepsilon_5 \end{cases}$$

module d'élasticité de Young E :

$$(relation\ 2) \Leftrightarrow \varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} \Rightarrow \sigma_t = \varepsilon_t \cdot E$$

En traçant la courbe l'interpolation linéaire issue des valeurs de mesure $\sigma_t = f(\varepsilon_t)$, on obtient l'équation :

$$y = 0,07729061x - 47,96281866$$

E correspond à la valeur de la pente, moyennant un réajustement des unités (*car ε_t n'a pas d'unités*), on trouve :

$$E_{\text{exp}} = 77290\text{MPa}$$

coefficient de Poisson ν :

$$(relation\ 2) \Leftrightarrow \nu = -\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_t} \Rightarrow \varepsilon_L = -\varepsilon_t \cdot \nu$$

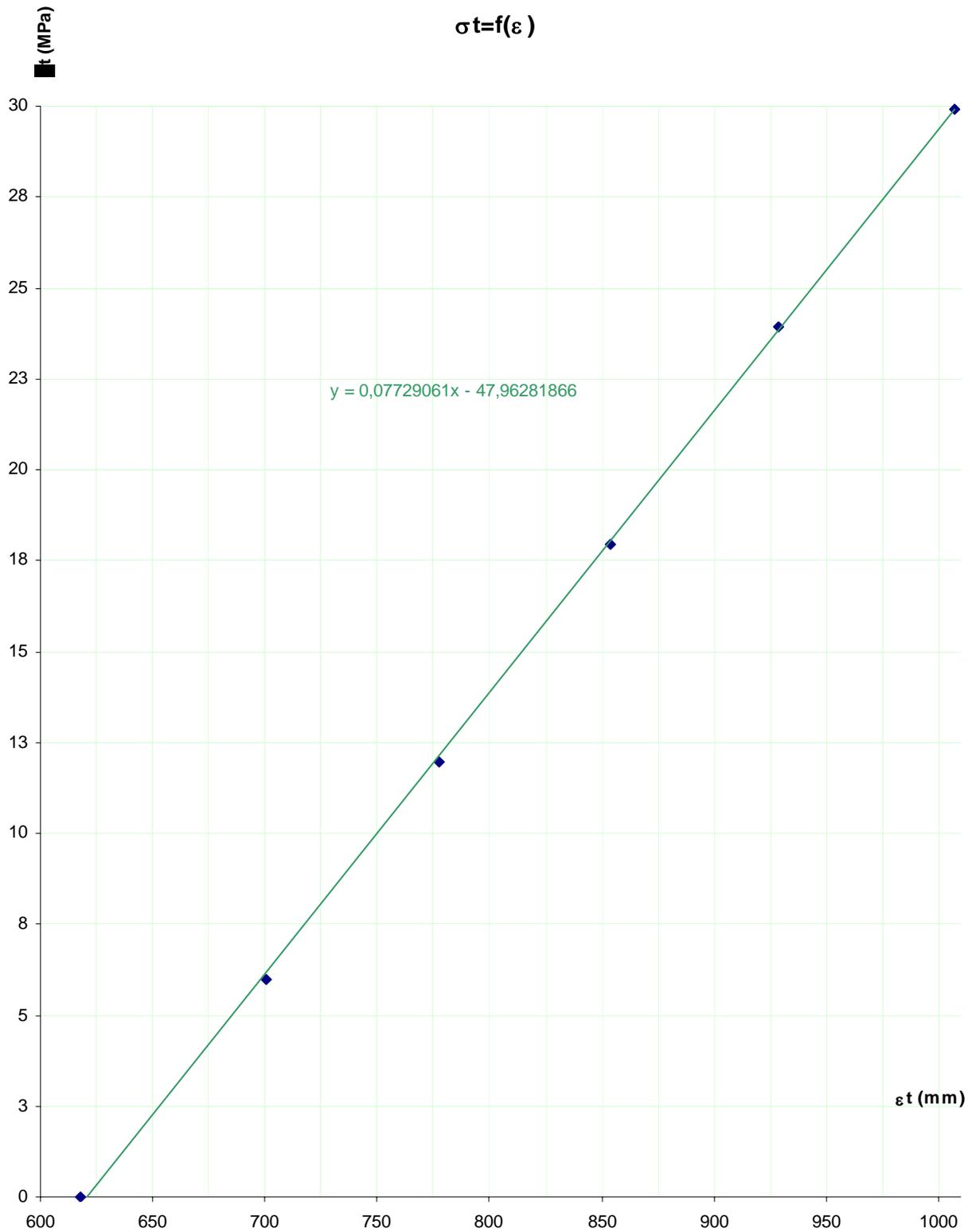
En traçant la courbe l'interpolation linéaire issue des valeurs de mesure $\varepsilon_L = f(\varepsilon_t)$, on obtient l'équation :

$$y = -0,300x - 238,702$$

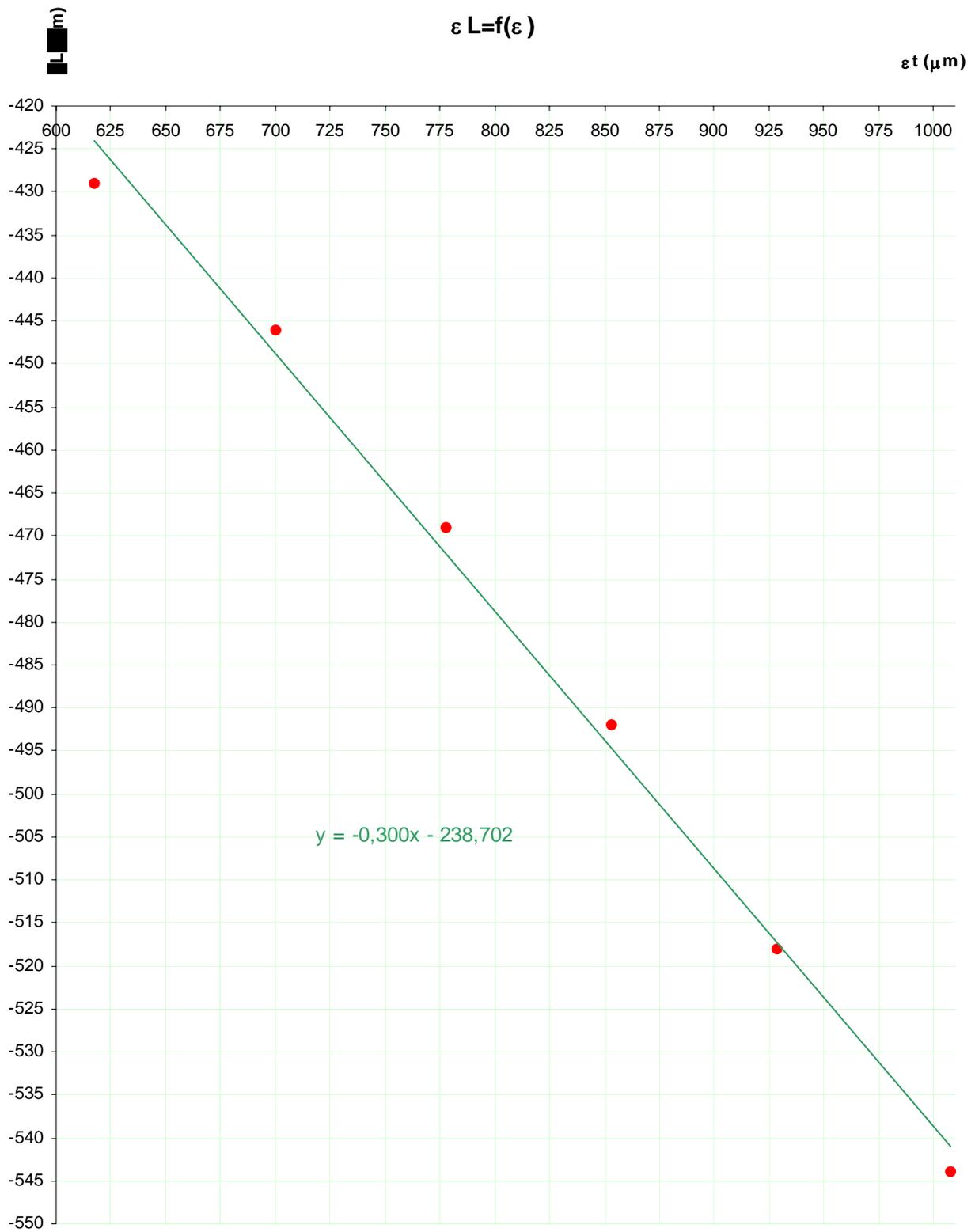
ν correspond à la valeur de la pente, moyennant un changement de signe, on trouve :

$$\nu_{\text{exp}} = 0,3$$

Courbes expérimentales $\sigma_t = f(\varepsilon_t)$



Courbes expérimentales $\varepsilon_L = f(\varepsilon_t)$



Partie B : charge axiale et transversales

Tableaux des valeurs expérimentales

jauge n°	angle (°)	lecture initiale	lecture finale	déformation (μm)
1	90	936	1192	256
2	60	916	1128	212
3	45	91	250	159
4	30	175	291	116
5	0	-408	-346	62
6	90	286	548	262

enveloppe :

- diamètre (d) : 76,14 mm
- épaisseur (e) : 3,18 mm

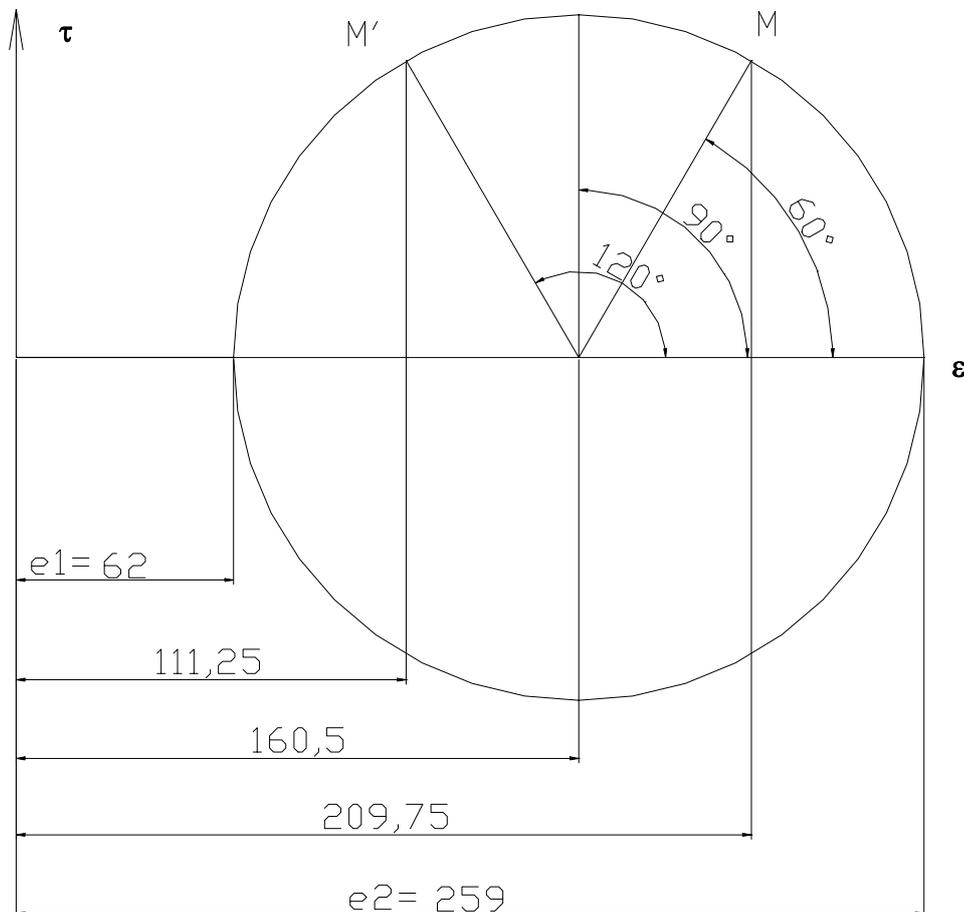
Détermination des déformations principales sans E et ν

Les déformations principales sont données par les jauges :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_6}{2} = \frac{256 + 262}{2} = 259 \mu\text{def} \\ \varepsilon_L = \varepsilon_5 = 62 \mu\text{def} \end{cases}$$

détermination des déformations à 30°, 45° et 60° par le cercle de Mohr :

(cercle de Mohr réalisé sous Autocad v14 pour plus de précision)



détermination des déformations à 30°, 45° et 60° par le calcul :

$$\begin{aligned}
 (\text{relation 3}) \Leftrightarrow & \begin{cases} \varepsilon_{1\theta} = \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\right) + \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right) \cos(2\theta) \\ \varepsilon_{2\theta} = \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\right) + \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}\right) \cos(2\theta) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \varepsilon_{1\theta} = \varepsilon_1 \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\right) + \varepsilon_2 \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}\right) \\ \varepsilon_{2\theta} = \varepsilon_1 \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}\right) + \varepsilon_2 \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\right) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} & \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \\ \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} & \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1\theta} \\ \varepsilon_{2\theta} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

On construit le programme **Emean.m** sous *Matlab v5.3* qui résout le système précédent pour toute valeur d'angle. Par application de ce programme aux valeurs d'angles 30°, 45° et 60°, on trouve : (en μdef)

pour 30° :

```
Emean(30)
    209.7500
    111.2500
```

pour 45° :

```
Emean(45)
    160.5000
    160.5000
```

pour 60° :

```
Emean(60)
    111.2500
    209.7500
```

Détermination des déformations principales connaissant E et ν

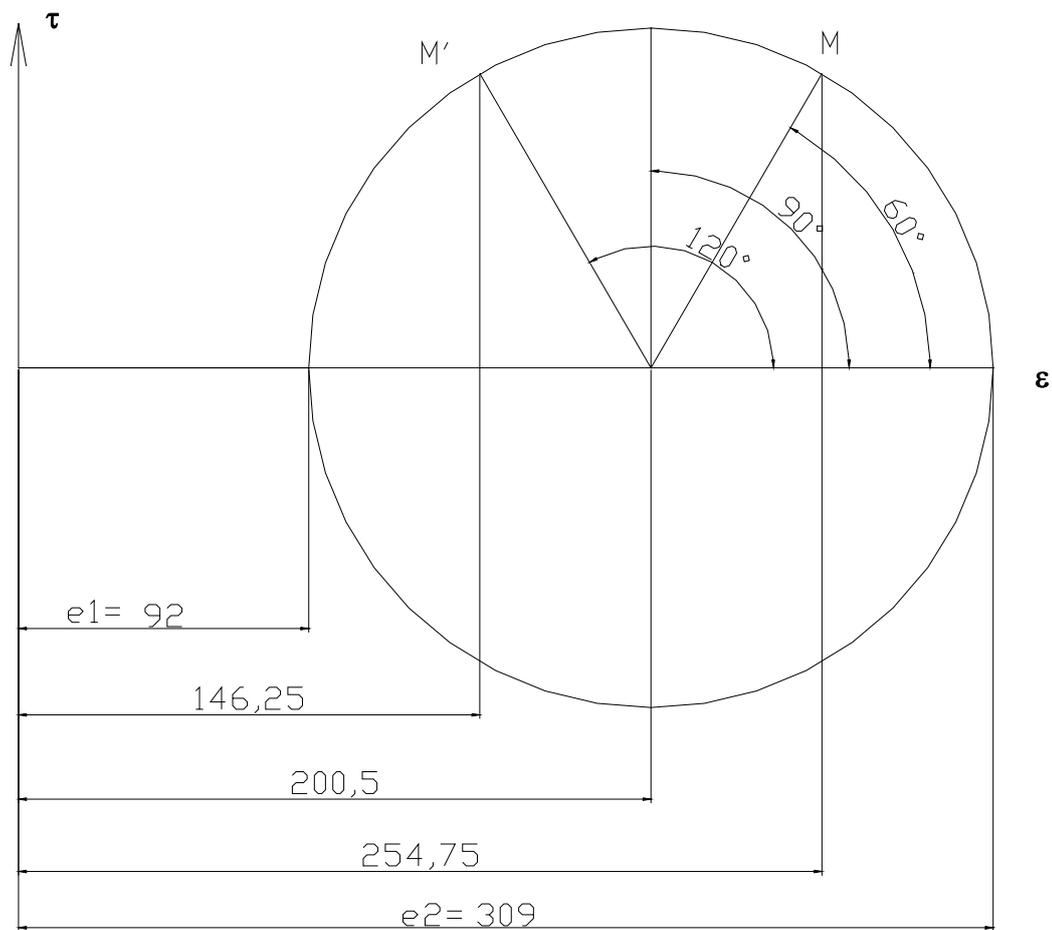
On a trouvé (partie A) : $\begin{cases} E_{\text{exp}} = 77290 \text{MPa} \\ \nu_{\text{exp}} = 0,3 \end{cases}$

$$(\text{relation 2}) \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E} \\ \Leftrightarrow \sigma_i = \frac{p \cdot d_i}{2e} \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_i = \frac{p \cdot d_i}{2e \cdot E} = \frac{2.76,14}{2.3,18.77290} = 309 \mu\text{def}$$

$$(\text{relation 2}) \Leftrightarrow \nu = \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_i} \Rightarrow \varepsilon_L = \varepsilon_i \cdot \nu = \frac{p \cdot d_i}{2e \cdot E} \cdot \nu = \frac{2.76,14 \cdot 0,3}{2.3,18.77290} = 92 \mu\text{def}$$

détermination des déformations à 30°, 45° et 60° connaissant E et ν (cercle de Mohr):

(cercle de Mohr réalisé sous Autocad v14 pour plus de précision)



Conclusion :

- Partie A : charge axiale supprimée : $E_{\text{exp}} = 77290\text{MPa}$
 $\nu_{\text{exp}} = 0,3$
- Partie B : charge axiale et transversale : déformations en μdef

jauge n°	ϵ_i Expérimentalement	ϵ_i Cercle de Mohr (sans E, ν)	ϵ_i Calcul (sans E, ν)	ϵ_i Cercle de Mohr (sans E, ν)
1	256	259	259	309
2	212	209	209	254
3	159	160	160	200
4	116	111	111	146
5	62	62	62	92
6	262	259	259	309

Les derniers résultats ne corroborent pas tout à fait avec la théorie. Le calculs paraissent justes, on peut donc légitimement supposer une erreur de manipulation au niveau des déformations (*lecture finale- lecture initiale*) au vue de la valeur de $E_{\text{exp}} (= 77290\text{MPa})$ trouvée (*car* : $\nu_{\text{exp}} = 0 \leq 0,3 \leq 0,5$)...

En effet dans la littérature, Le matériau se rapprochant le plus d'un tel module d'élasticité semble être le verre ! ($E_{\text{verre}} = 70000\text{MPa}$).

fonction Emean.m

```
function e=Emean(a)
% a: angle en lequel on souhaite connaitre les déformations

%-- données -----
% e1: déformation principale max
% e2: déformation principale min
e1=259;
e2=62;

%-- calcul des déformations -----
p=(1+cos(a*pi/90))/2;
m=(1-cos(a*pi/90))/2;
A=[p,m;m,p];
B=[e1;e2];
e=A*B;
```